63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

---

1. *Nájdite všetky celé kladné čísla, ktoré nie sú mocninou čísla* 2 *a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako* 1. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Využime zvyčajný zápis $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ prvočíselného rozkladu hľadaného čísla n, v ktorom $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú všetky prvočísla deliace n a exponenty α_i sú kladné celé čísla. Z podmienky úlohy vyplýva, že $p_1 = 2$ (inak by najväčším nepárnym deliteľom čísla n bolo samo n a dostali by sme nerovnosť $n > 3n$, ktorá nemôže platiť) a že $k \geqq 2$ (inak by n bolo mocninou čísla 2). Najväčším nepárnym deliteľom čísla n je zrejme číslo $p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, jeho najmenším nepárnym deliteľom (väčším ako 1) je určite prvočíslo p_2. Rovnica vyjadrujúca podmienku úlohy má preto zápis

$$2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 3 p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + 5 p_2, \quad \text{čiže} \quad \bigl(2^{\alpha_1} - 3\bigr) p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 5.$$

(V prípade $k = 2$ je ľavá strana upravenej rovnice rovná $\bigl(2^{\alpha_1} - 3\bigr) p_2^{\alpha_2 - 1}$.) Keďže číslo 5 má jediné dva delitele, platí $2^{\alpha_1} - 3 \in \{1, 5\}$, takže $\alpha_1 = 2$ alebo $\alpha_1 = 3$.

(i) Prípad $\alpha_1 = 2$. Upravená rovnica prejde na tvar

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 5,$$

takže je splnená práve vtedy, keď je buď $k = 2$, $p_2 = 5$ a $\alpha_2 - 1 = 1$, alebo $k = 3$, $\alpha_2 - 1 = 0$, $p_3 = 5$ a $\alpha_3 = 1$ – vtedy ale prvočíslo p_2 nemôže byť ľubovoľné, lebo z $2 < p_2 < p_3 = 5$ vyplýva $p_2 = 3$. Prvej možnosti tak zodpovedá jediné riešenie $n = 2^2 \cdot 5^2 = 100$, druhej možnosti jediné riešenie $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$.

(ii) Prípad $\alpha_1 = 3$. Teraz dostávame po úprave rovnicu

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 1,$$

ktorá znamená, že $k = 2$ a $\alpha_2 - 1 = 0$ (na prvočíslo p_2 tentoraz žiadne obmedzenie okrem nerovnosti $p_2 > 2$ neexistuje). Tomuto prípadu tak zodpovedá nekonečne veľa riešení $n = 2^3 \cdot p_2^1 = 8p_2$.

Odpoveď. Všetky vyhovujúce celé kladné čísla n sú: $n = 60$, $n = 100$ a $n = 8p$, pričom p je ľubovoľné nepárne prvočíslo.

Poznámka. Celý postup zapíšeme úspornejšie, keď namiesto „úplného" prvočíselného rozkladu hľadaného čísla n využijeme jeho vyjadrenie $n = 2^\alpha \cdot p \cdot l$, v ktorom 2^α je najvyššia mocnina čísla 2, ktorá delí n, p je najmenšie nepárne prvočíslo deliace n a l je (nepárne) číslo, ktoré nemá žiadneho prvočíselného deliteľa menšieho ako p (môže byť aj $l = 1$, v ostatných prípadoch však $l \geqq p$). Potom je našou úlohou riešiť rovnicu

$$n = 2^\alpha pl = 3pl + 5p, \quad \text{čiže} \quad \bigl(2^\alpha - 3\bigr) l = 5.$$

Odtiaľ máme buď $l = 1$ a $2^\alpha - 3 = 5$, alebo $l = 5$ a $2^\alpha - 3 = 1$. V prvom prípade vychádza $\alpha = 3$, a teda vyhovuje každé $n = 8p$, pričom p je ľubovoľné nepárne prvočíslo; v druhom prípade je $l = 5$ a $\alpha = 2$, takže $n = 20p$, pričom ale z $5 = l \geqq p$ vyplýva $p \in \{3, 5\}$, a preto vyhovujú iba čísla $n = 60$ a $n = 100$.

Iné riešenie. Zo zadania vyplýva, že medzi hľadaným číslom n a jeho najväčším nepárnym deliteľom L platia nerovnosti $n > 3L$ a $n \leqq 3L + 5L = 8L$. Keďže podiel $n : L$ je mocnina čísla 2, z nerovností $3 < n : L \leqq 8$ vyplýva, že buď $n = 4L$, alebo $n = 8L$.

Začneme s rozborom prípadu $n = 8L$. Zo spôsobu, akým sme odvodili nerovnosť $n \leqq 8L$, vyplýva, že číslo L je nielen najväčším, ale aj najmenším netriviálnym nepárnym deliteľom čísla n, a preto je prvočíslom. Dostávame prvú skupinu hľadaných čísel n, ktoré majú tvar $n = 8L$, pričom L je ľubovoľné nepárne prvočíslo.

V prípade $n = 4L$ je najmenší netriviálny nepárny deliteľ čísla n také prvočíslo p, ktorého päťnásobok je rovný číslu $n - 3L = L$. Z rovnosti $5p = L$ máme $n = 4L = 20p$, a preto $5 \mid n$, takže $p \leqq 5$, čiže $p \in \{3, 5\}$. Zodpovedajúce riešenia sú $n = 60$ a $n = 100$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vhodné vyjadrenie oboch dotyčných deliteľov a zostavenie rovnice vyjadrujúcej podmienku úlohy, ďalší 1 bod za úpravu na rovnicu medzi istým súčinom a číslom 5. Podľa úplnosti upravenej rovnice potom dajte zostávajúce tri body. Pri postupe z druhého riešenia dajte 1 bod za nerovnosť $n > 3L$, 2 body za nerovnosť $n \leqq 8L$, 1 bod za dôsledok o možných tvaroch $n = 4L$, $n = 8L$ a po 1 bode za ich rozbor.

---

2. *V rovine sú dané dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pričom $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Nájdite množinu všetkých bodov X, ktoré neležia na priamke S_1S_2 a majú tú vlastnosť, že úsečky S_1X, S_2X pretínajú postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky S_1S_2 sa rovnajú.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. V prvej časti riešenia predpokladajme, že X je ľubovoľný bod, ktorý má požadovanú vlastnosť. Zrejme musí ležať vo vonkajšej oblasti každej z oboch kružníc. Body S_1, S_2 a X sú potom vrcholmi trojuholníka, ktorého strany S_1X, S_2X sú preťaté postupne kružnicami k_1, k_2 v bodoch Y_1 a Y_2, ktoré ležia na jednej rovnobežke s priamkou S_1S_2 (obr. 1). Preto aj body Y_1, Y_2, X sú vrcholmi trojuholníka, ktorý je podobný trojuholníku S_1S_2X podľa vety *uu*, teda pre ich strany platí úmera

$$\frac{|XY_1|}{|XS_1|} = \frac{|XY_2|}{|XS_2|}, \tag{1}$$

ktorú vďaka rovnostiam

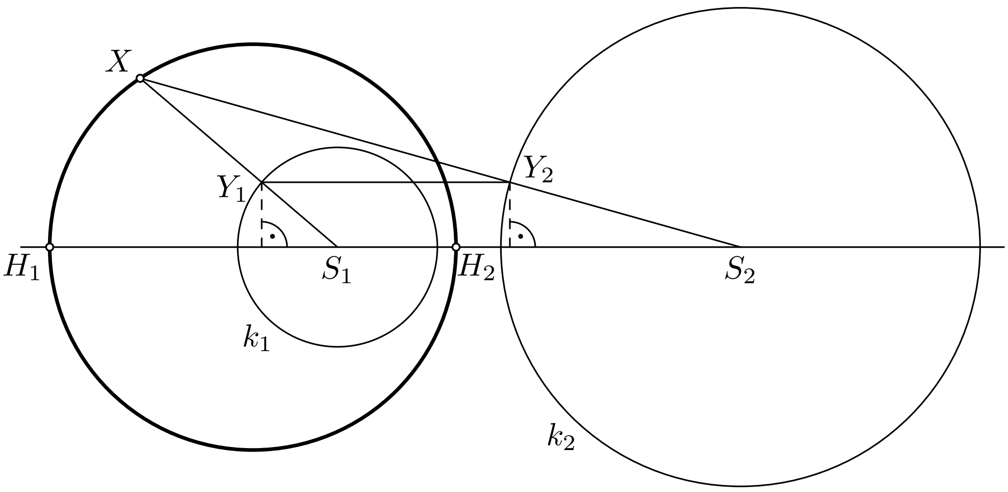
$$|XY_1| = |XS_1| - r_1 \quad \text{a} \quad |XY_2| = |XS_2| - r_2 \tag{2}$$

prevedieme na úmeru pre dĺžky úsečiek XS_1 a XS_2:

$$\frac{|XS_1| - r_1}{|XS_1|} = \frac{|XS_2| - r_2}{|XS_2|},$$

takže

$$\frac{|XS_1|}{|XS_2|} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{3}$$



Obr. 1

Množinu bodov v rovine s danými bodmi S_1 a S_2, ktoré majú vlastnosť (3), poznáme: pre $r_1 = r_2$ je to os úsečky S_1S_2 a pre $r_1 \neq r_2$ je to *Apollóniova kružnica.* Tá je určená svojim priemerom H_1H_2 na priamke S_1S_2, na ktorej sú H_1 a H_2 jediné dva body X s vlastnosťou (3). Z tej navyše vyplýva, že sa jedná o stredy rovnoľahlostí kružníc k_1 a k_2.

V druhej časti riešenia budeme naopak predpokladať, že bod X je ľubovoľný bod Apollóniovej kružnice určenej rovnicou (3), ktorý je rôzny od jej priesečníkov H_1, H_2 s priamkou S_1S_2. Vzhľadom na predpoklady úlohy ležia body H_1, H_2 vo vonkajšej oblasti oboch kružníc, takže tam leží aj príslušná Apollóniova kružnica, pretože jej priemer obsahuje priemer jednej z daných kružníc (tej s menším polomerom) a s priemerom druhej kružnice je disjunktná.

Body S_1, S_2 a X sú tak vrcholmi trojuholníka, pričom $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$. Existujú teda body $Y_1 \in k_1$, $Y_2 \in k_2$ ležiace vnútri strán S_1X, S_2X trojuholníka S_1S_2X. Preto pre ne tiež platia rovnosti (2), vďaka ktorým možno prejsť tentoraz od rovnice (3) k rovnici (1). Jej platnosť znamená, že trojuholníky S_1S_2X a Y_1Y_2X sú podobné podľa vety *sus*, a preto sú úsečky S_1S_2 a Y_1Y_2 rovnobežné. Body Y_1, Y_2 tak majú od priamky S_1S_2 rovnaké vzdialenosti, čo dokazuje požadovanú vlastnosť bodu X.

Odpoveď. Hľadanou množinou bodov X je Apollóniova kružnica určená rovnicou (3), z ktorej sú vylúčené oba jej priesečníky s priamkou S_1S_2. V prípade $r_1 = r_2$ je hľadanou množinou os úsečky S_1S_2 bez jej stredu.

Poznámka. Potrebnú vlastnosť Apollóniovej kružnice možno odvodiť priamo z rovnosti (3). Z rovnosti, ktorá je pred rovnosťou (3) a ktorá je s ňou v skutočnosti ekvivalentná, pre ľubovoľný taký bod X vyplýva, že oba výrazy $|XS_1| - r_1$ a $|XS_2| - r_2$ majú rovnaké znamienko. A keďže podľa predpokladov úlohy je

$$(|XS_1| - r_1) + (|XS_2| - r_2) > |S_1S_2| - (r_1 + r_2) > 0,$$

je $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$, čo znamená, že nájdená Apollóniova kružnica leží v prieniku vonkajších oblastí oboch daných kružníc.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za dôkaz, že každý vyhovujúci bod X leží na Apollóniovej kružnici a 2 body za obrátené tvrdenie. Zo zadania úlohy je ihneď zrejmé, že všetky vyhovujúce body X

musia ležať v prieniku vonkajších oblastí oboch kružníc k_1 a k_2. Poznatok, že v tomto prieniku leží aj nájdená Apollóniova kružnica, by nemal v úplnom riešení chýbať. Za absenciu tohto poznatku strhnite 1 bod. Tiež strhnite 1 bod, ak riešiteľ v priebehu riešenia alebo na záver nespomenie situáciu, keď $r_1 = r_2$.

---

3. *Nájdite všetky trojice reálnych čísel x, y a z, pre ktoré platí*

$$x\bigl(y^2 + 2z^2\bigr) = y\bigl(z^2 + 2x^2\bigr) = z\bigl(x^2 + 2y^2\bigr).$$

(*Michal Rolínek*)

Riešenie. Ak je napr. $x = 0$, dostávame sústavu $0 = yz^2 = 2y^2z$, takže aj jedna z hodnôt y, z je nulová a druhá môže byť ľubovoľná. Podobne vyriešime aj prípady $y = 0$ a $z = 0$. Dostávame tak tri skupiny riešení $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$ a $(0, 0, t)$, pričom t je ľubovoľné reálne číslo. Všetky ostatné riešenia už spĺňajú podmienku $xyz \neq 0$, ktorej platnosť budeme vo zvyšku riešenia predpokladať.

Úpravou rovnice $x(y^2 + 2z^2) = y(z^2 + 2x^2)$ dostaneme $(2x - y)(z^2 - xy) = 0$. Rozlíšime teda, ktorý z dvoch činiteľov je rovný nule.

(i) $2x - y = 0$. Z pôvodnej sústavy po dosadení $y = 2x$ zostane jediná rovnica

$$2x(2x^2 + z^2) = 9x^2z,$$

odkiaľ po delení číslom $x \neq 0$ dostávame

$$4x^2 + 2z^2 - 9xz = 0, \quad \text{čiže} \quad (x - 2z)(4x - z) = 0.$$

Prípadu (i) teda zodpovedajú skupiny riešení $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$, pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

(ii) $z^2 - xy = 0$. Čiastočným dosadením $z^2 = xy$ dostaneme jedinú rovnicu

$$xy(2x + y) = z(x^2 + 2y^2),$$

ktorá je (vďaka tomu, že $x^2 + 2y^2 > 0$) ekvivalentná s rovnicou

$$z = \frac{xy(2x + y)}{x^2 + 2y^2}.$$

Teraz ale musíme zistiť, kedy také z spĺňa podmienku $z^2 = xy$, ktorá po dosadení nájdeného vzorca pre z získava tvar

$$\frac{x^2y^2(2x + y)^2}{(x^2 + 2y^2)^2} = xy.$$

Po vydelení číslom $xy \neq 0$ a odstránení zlomku dostaneme podmienku

$$xy(2x + y)^2 = (x^2 + 2y^2)^2, \quad \text{čiže} \quad (4y - x)(x^3 - y^3) = 0.$$

Posledná rovnosť platí práve vtedy, keď buď $x = 4y$, alebo $x^3 = y^3$, t. j. $x = y$.[1] Po dosadení do vzorca pre z dostaneme v prvom prípade $z = 2y$, v druhom $z = x$. Prípadu

[1] Posledný záver platí vďaka tomu, že funkcia $x \mapsto x^3$ je na reálnom obore rastúca, a teda prostá.

(ii) teda zodpovedajú skupiny riešení $(4t, t, 2t)$ a (t, t, t), pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

Odpoveď. Všetky riešenia danej sústavy sú $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$, (t, t, t), $(4t, t, 2t)$, $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$, pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

Poznámka. Ukážeme spôsob, ako sa v podanom riešení vyhnúť rozboru náročnejšieho prípadu (ii). Vďaka cyklickej symetrii má zadaná sústava za dôsledok nielen prvú z nasledujúcich troch rovníc (ktorú sme vyššie odvodili), ale aj ďalšie dve analogické rovnice

$$(2x - y)(z^2 - xy) = 0, \quad (2y - z)(x^2 - yz) = 0, \quad (2z - x)(y^2 - zx) = 0. \tag{1}$$

Prípad $2x - y = 0$ sme vyššie rozobrali, prípady $2y - z = 0$ a $2z - x$ sú analogické a vypísaním riešení pre tieto tri prípady dostaneme všetky riešenia uvedené v odpovedi s výnimkou (t, t, t). Ak nenastane žiadny z týchto troch prípadov, musia byť splnené rovnice

$$z^2 - xy = x^2 - yz = y^2 - zx = 0. \tag{2}$$

Ukážeme, že ich v obore reálnych čísel spĺňajú iba trojice $(x, y, z) = (t, t, t)$. To je jednoduchý dôsledok algebraickej identity

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(z^2 - xy) + 2(x^2 - yz) + 2(y^2 - zx),$$

ktorej pravá strana je podľa (2) rovná nule, takže sa rovná nule aj základ každej z troch druhých mocnín na ľavej strane (ktorá by inak mala kladnú hodnotu). Dodajme, že sústavu (2) možno vyriešiť aj kratšou úvahou: ak platí rovnosť (2), majú výrazy x^3, y^3, z^3 tú istú hodnotu xyz, a tak platí $x = y = z$ podľa poznámky pod čiarou.

Iné riešenie. Nebudeme opakovať úvodnú úvahu pôvodného riešenia a rovno budeme hľadať len tie riešenia, ktoré spĺňajú podmienku $xyz \neq 0$.

Po vydelení výrazov v zadanej sústave nenulovým číslom xyz dostaneme

$$\frac{y}{z} + \frac{2z}{y} = \frac{z}{x} + \frac{2x}{z} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}, \tag{3}$$

čo je rovnosť troch hodnôt funkcie $f(s) = s + 2/s$ v nenulových bodoch $s_1 = y/z$, $s_2 = z/x$ a $s_3 = x/y$. Zistíme preto, kedy pre nenulové čísla s a t platí $f(s) = f(t)$. Z vyjadrenia

$$f(s) - f(t) = s + \frac{2}{s} - t - \frac{2}{t} = \frac{(s - t)(st - 2)}{st}$$

vidíme, že želaná situácia nastane, len ak $s = t$ alebo $st = 2$.

Sústava rovníc (3) je preto splnená práve vtedy, keď pre zavedené čísla s_1, s_2, s_3 platí: každé dve z nich sa rovnajú alebo je ich súčin rovný číslu 2. Ak je ale taký súčin rovný 2, tretie číslo je vďaka rovnosti $s_1 s_2 s_3 = 1$ rovné $\frac{1}{2}$ a prvé dve čísla (majúce súčin 2) teda ležia v množine $\{\frac{1}{2}, 4\}$, takže sú rôzne, a preto (s_1, s_2, s_3) je niektorou permutáciou trojice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Ľahko možno overiť, že týmto (spolu trom) permutáciám zodpovedajú riešenia $(4t, t, 2t)$, $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$ pôvodnej sústavy (nebudeme to tu rozpisovať). Ešte jednoduchšie je dokončenie zvyšného prípadu $s_1 = s_2 = s_3$: vďaka rovnosti $s_1 s_2 s_3 = 1$ je spoločná hodnota čísel s_i rovná 1 a zodpovedajúce riešenia zrejme sú (t, t, t) (opäť je t ľubovoľné reálne číslo).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za odvodenie súčinového tvaru aspoň jednej z rovníc (1) alebo za úpravu sústavy na tvar (3) doplnenú zmienkou o súvislosti s funkciou $f(s) = s + 2/s$.

4. *Volejbalového turnaja sa zúčastnilo šesť družstiev, každé hralo proti každému práve raz. V jednotlivých piatich kolách prebiehali v tom istom čase vždy tri zápasy na troch kurtoch 1, 2 a 3. Koľko bolo možností pre rozpis takého turnaja? Rozpisom rozumieme tabuľku 3×5, v ktorej pre $i \in \{1, 2, 3\}$ a $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je na pozícii (i, j) uvedená dvojica družstiev (bez určenia poradia), ktoré hrali proti sebe v j-tom kole na kurte číslo i. Namiesto dekadického zápisu výsledného čísla stačí uviesť jeho rozklad na súčin prvočísel.* (Martin Panák)

Riešenie. Permutácie kurtov v jednotlivých kolách aj permutácie samotných kôl posúdime nakoniec; najskôr *družstvá pevne označíme číslami* 1, 2, 3, 4, 5, 6 a podľa toho *päticu kôl ľubovoľného rozpisu jednoznačne preusporiadame.* Zápas družstva x proti družstvu y budeme označovať ako pár (x, y) (máme pritom na pamäti, že na poradí čísel v páre nezáleží).

Za kolá 1 a 2 prehlásime kolá postupne s pármi $(1, 2)$ a $(1, 3)$; ak je pritom v kole 1 pár $(3, a)$ a v kole 2 pár $(2, b)$, sú a, b dve *rôzne* čísla z $\{4, 5, 6\}$, inak by nám totiž pre tretí zápas v každom z oboch kôl zvýšila tá istá dvojica. Za kolá 3, 4 a 5 potom prehlásime kolá postupne s pármi $(1, a)$, $(1, b)$ a $(1, c)$, pričom $c \in \{4, 5, 6\} \setminus \{a, b\}$. Máme teda jednoznačne určené poradie všetkých kôl s neúplným rozpisom

$$\begin{array}{lll} 1: & (1,2), & (3,a), \\ 2: & (1,3), & (2,b), \\ 3: & (1,a), & \\ 4: & (1,b), & \\ 5: & (1,c), & \end{array}$$

ktorý sa dá zrejme jediným spôsobom doplniť na úplný rozpis:

$$\begin{array}{llll} 1: & (1,2), & (3,a), & (b,c), \\ 2: & (1,3), & (2,b), & (a,c), \\ 3: & (1,a), & (2,c), & (3,b), \\ 4: & (1,b), & (2,a), & (3,c), \\ 5: & (1,c), & (2,3), & (a,b). \end{array}$$

Keďže (a, b, c) je ľubovoľná permutácia trojice $(4, 5, 6)$, je počet takto zapísaných rozpisov práve $3! = 6$, v každom takom rozpise potom môžeme kolá usporiadať $5!$ spôsobmi a nakoniec v každom z piatich kôl priradiť párom kurty práve $3! = 6$ spôsobmi. Hľadaný počet je teda rovný číslu

$$6 \cdot 5! \cdot 6^5 = 5! \cdot 6^6 = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 = 5\,598\,720.$$

Iné riešenie. Označme družstvá číslami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 a zostavme najskôr neusporiadaný rozpis turnaja tak, že jednotlivé kolá „očíslujeme“ súpermi družstva číslo 1 a preskúmame, koľkými spôsobmi sa dá k týmto dvojiciam doplniť zápas družstva číslo 2, pričom súpera dvojky vyberáme už len zo štvorprvkovej množiny $\{3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{array}{lll} 1: & (1,2), & \\ 2: & (1,3), & (2,a), \\ 3: & (1,4), & (2,b), \\ 4: & (1,5), & (2,c), \\ 5: & (1,6), & (2,d). \end{array}$$

Na dopĺňané páry $(2,a)$, $(2,b)$, $(2,c)$, $(2,d)$ máme nasledujúce obmedzenia:

- ▷ Družstvo 2 nemôže mať v žiadnom kole rovnakého súpera ako družstvo 1.
- ▷ Obe družstvá 1 a 2 nemôžu mať v dvoch rôznych kolách striedavo tých istých súperov, pretože potom by nám na tretí zápas v oboch kolách zvýšila tá istá dvojica.

Pri splnení týchto dvoch podmienok je potom zrejme jednoznačne určená zvyšná dvojica v každom z kôl, v ktorých proti sebe nehrajú 1 a 2. Po ich určení nám zostanú práve dve dvojice súperov, ktoré sa musia stretnúť v kole, v ktorom spolu hrajú 1 a 2.

Ostáva už len určiť počet permutácií štvorprvkovej množiny $\{3,4,5,6\}$ súperov družstva 2, ktoré spĺňajú uvedené dve podmienky.

Počet permutácií (a,b,c,d) spĺňajúcich prvú podmienku, teda nerovnosti $a \neq 3$, $b \neq 4$, $c \neq 5$ a $d \neq 6$, nájdeme metódou inklúzie a exklúzie: vhodných permutácií je

$$4! - \left(4 \cdot 3! - \binom{4}{2} \cdot 2! + 4 - 1\right) = 9.$$

Medzi nimi sú práve tri permutácie (a,b,c,d), ktoré nevyhovujú druhej podmienke: jedná sa zrejme o permutácie $(4,3,6,5)$, $(5,6,3,4)$ a $(6,5,4,3)$ a žiadne iné.

Všetkých možných rozpisov je tak celkom 6, v každom kole máme však $3! = 6$ možností, ako priradiť párom súperov jednotlivé kurty, a celkom 5! možných usporiadaní jednotlivých kôl, dokopy teda

$$6 \cdot 6^5 \cdot 5! = 5! \cdot 6^6 = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 = 5\,598\,720 \text{ možností.}$$

Poznámka. Namiesto použitia princípu inklúzie a exklúzie môžeme všetky permutácie (a,b,c,d) vyhovujúce obom podmienkam vhodným systematickým postupom priamo nájsť a vypísať. Jedná sa o permutácie $(4,5,6,3)$, $(4,6,3,5)$, $(5,3,6,4)$, $(5,6,4,3)$, $(6,3,4,5)$, $(6,5,3,4)$.

Naopak, k počtu permutácií vyhovujúcich prvej, nie však druhej podmienke môžeme dospieť nasledujúcou úvahou: máme šesť možností, ako vybrať prestriedavanú dvojicu súperov, pritom také dvojice sú v každej z počítaných permutácií zrejme dve.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dajte 2 až 3 body, ak riešiteľ opíše nejaký zmysluplný spôsob, ako vytvoriť všetky možné rozpisy pre konanie turnaja, aj keď sa mu nakoniec nepodarí z toho odvodiť správny počet možností.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014