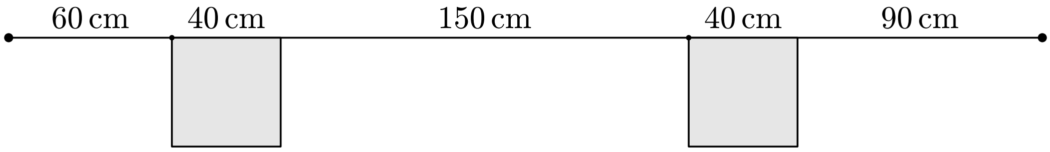
63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

1. *Medzi dvoma tyčami je napnutá šnúra dlhá 3,8 m, na ktorú chce mamička zavesiť vypraté vreckovky. Všetky vreckovky majú tvar štvorca so stranou 40 cm. Na šnúre však už visia dve vreckovky rovnakého tvaru od susedky a tie chce mamička nechať na svojich miestach. Pritom ľavý roh jednej z týchto vreckoviek je 60 cm od ľavej tyče a ľavý roh tej druhej je 1,3 m od pravej tyče. Koľko najviac vreckoviek môže mamička na šnúru zavesiť? Vreckovky sa vešajú natiahnuté za dva susedné rohy tak, aby sa žiadne dve neprekrývali.* (*Martin Mach*)

Nápad. Pomôžte si náčrtom s vyznačenými danými vzdialenosťami.

Riešenie. Celú situáciu môžeme pre názornosť prekresliť napríklad takto:



Susedkine vreckovky delia šnúru na 3 rôzne dlhé časti, do ktorých môže mamička vešať svoje vreckovky. Medzi ľavým rohom jednej vreckovky a ľavou tyčou je 60 cm. Medzi ľavým rohom druhej vreckovky a pravou tyčou je 130 cm a vreckovka je široká 40 cm; to znamená, že medzi jej pravým rohom a pravou tyčou je vzdialenosť 90 cm. Keďže je šnúra dlhá 380 cm, medzi vreckovkami ostáva 150 cm voľnej šnúry.

Medzi ľavú vreckovku a ľavú tyč sa vojde iba jedna mamičkina vreckovka (dve vreckovky vedľa seba by zabrali 80 cm šnúry a voľných je tu iba 60 cm). Medzi susedkine vreckovky môže mamička zavesiť tri svoje (tie zaberú 120 cm, keď sa zavesia tesne vedľa seba, na pridanie štvrtej by bola treba medzera dlhá 160 cm). Medzi pravú vreckovku a pravú tyč sa vojdú dve ďalšie mamičkine vreckovky. Celkom teda mamička môže na šnúru privesiť $1 + 3 + 2 = 6$ svojich vreckoviek.

Poznámka. Ak bude riešiteľ uvažovať vzdialenosť 1,3 m od pravej tyče k pravému rohu vreckovky, vyjde mu tiež výsledok „6 vreckoviek“. Také riešenie však nemôže byť uznané ako správne.

2. *Vojto má dve rovnaké sklíčka tvaru rovnostranného trojuholníka, ktoré sa líšia iba svojou farbou – jedno je červené, druhé modré. Keď sa sklíčka položia cez seba, vznikne útvar fialovej farby. Uveďte príklad prekrývania sklíčok, pri ktorom mohol Vojto dostať:*

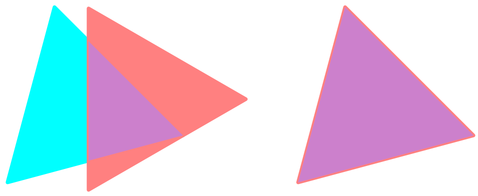
1. *fialový trojuholník,*
2. *fialový štvoruholník,*
3. *fialový päťuholník,*
4. *fialový šesťuholník.*

(*Erika Novotná*)

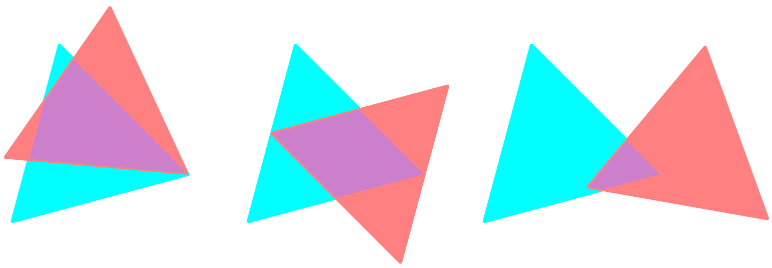
Nápad. Ak vám nestačí predstavivosť, vystrihnite si dva také trojuholníky z papiera a skúšajte ich klásť rôzne cez seba.

Riešenie. Každý z fialových mnohouholníkov sa dá realizovať mnohými rôznymi spôsobmi; uvádzame niekoľko možných príkladov.

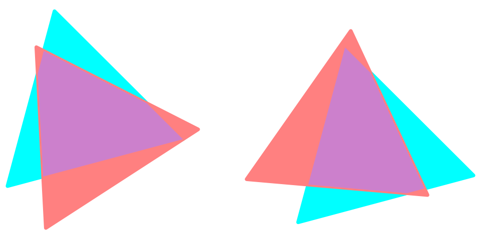
a) fialový trojuholník:



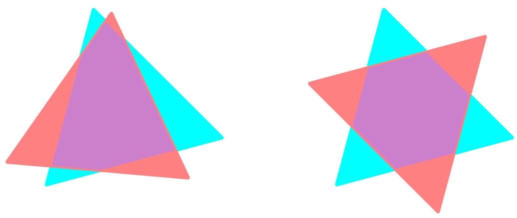
b) fialový štvoruholník:



c) fialový päťuholník:



d) fialový šesťuholník:



---

3. *Palindróm je také číslo, ktoré je rovnaké, či už ho čítame spredu alebo zozadu. (Napr. číslo* 1881 *je palindróm.) Nájdite taký dvojciferný a trojciferný palindróm, aby ich súčet bol štvorciferný palindróm.* (*Marta Volfová*)

Nápad. Akú cifru má štvorciferný palindróm na prvom mieste?

Riešenie. Súčtom dvojciferného a trojciferného čísla môžeme získať nanajvýš číslo 1 098. Ak je súčtom štvorciferné číslo, musí byť jeho prvá cifra 1. Prvá cifra trojciferného sčítanca musí byť 9, lebo keby bol tento sčítanec menší ako 900, bol by súčet menší ako 1 000.

V našom prípade sú všetky čísla palindrómy, preto poznáme aj posledné cifry trojciferného sčítanca a výsledného súčtu:

$$**+9*9=1**1.$$

Odtiaľ vyplýva, že druhá cifra pri prvom sčítanci musí byť 2 – dvojciferný palindróm je 22:

$$22 + 9{*}9 = 1{*}{*}1.$$

Najmenší možný palindróm na pravej strane je 1 001; ten je súčtom 22 a 979. Ďalšie štvorciferné palindrómy (1 111, 1 221, ...) sa takto vyjadriť nedajú, pretože sú väčšie ako 1 098. Jediné možné riešenie úlohy je:

$$22 + 979 = 1\,001.$$

---

4. *Eve sa páčia čísla deliteľné šiestimi, Zdenke čísla obsahujúce aspoň jednu šestku a Jane čísla, ktorých ciferný súčet je* 6.

1. *Ktoré dvojciferné čísla sa páčia všetkým trom dievčatám?*
2. *Ktoré dvojciferné čísla sa páčia práve dvom dievčatám?*

(*Michaela Petrová*)

Nápad. Určte, ktoré dvojciferné čísla sa páčia jednotlivým dievčatám.

Riešenie. Eve sa páčia čísla, ktoré sa dajú bezo zvyšku deliť šiestimi; všetky dvojciferné násobky čísla 6 sú:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96.

Dvojciferné čísla, ktoré sa páčia Zdenke, sú:

16, 26, 36, 46, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 76, 86, 96.

Dvojciferné čísla, ktoré sa páčia Jane, sú:

15, 24, 33, 42, 51, 60.

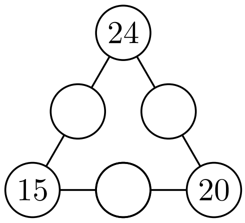
Pre lepšiu predstavu všetky uvedené čísla zapíšeme do tabuľky:

Eva	12			18	24		30		36	42		48		54		60
Zdenka			16			26			36		46				56	60
Jana		15			24			33		42			51			60

Eva						66				72		78	84		90	96
Zdenka	61	62	63	64	65	66	67	68	69		76			86		96
Jana																

Z toho vidíme, že všetkým trom dievčatám sa páči iba číslo 60. Práve dvom dievčatám sa páčia čísla 24, 36, 42, 66 a 96.

5. *Doplňte do prázdnych krúžkov na obr. prirodzené čísla tak, aby súčet čísel na každej strane trojuholníka bol rovnaký a aby súčet všetkých šiestich čísel bol 100.*

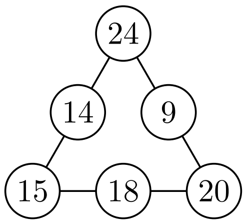


(*Libor Šimůnek*)

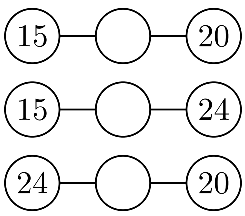
Nápad. Na začiatku dodržte iba prvú podmienku, teda vyplňte trojuholník tak, aby súčet na všetkých jeho stranách bol rovnaký.

Riešenie. Najmenšie číslo, ktoré máme doplniť, bude na strane s číslami 24 a 20, lebo zo známych čísel dávajú práve tieto dve najväčší súčet. Skúsme do prázdneho políčka na tejto strane doplniť najmenšie možné prirodzené číslo, teda 1. V takom prípade by súčet na strane trojuholníka bol $24 + 1 + 20 = 45$. Do zvyšných prázdnych políčok by potom patrili čísla $45 - 15 - 20 = 10$ a $45 - 15 - 24 = 6$.

Súčet všetkých šiestich čísel by v tomto prípade bol $24+1+20+10+15+6 = 76$, čo je o 24 menej ako požadovaných 100. Každé z doplnených čísel preto musíme zväčšiť o $24 : 3 = 8$. Do prázdnych políčok patria čísla $1 + 8 = 9$, $10 + 8 = 18$ a $6 + 8 = 14$:



Iné riešenie. Čísla v prázdnych políčkach majú dať súčet $100 - 24 - 20 - 15 = 41$. Každú stranu trojuholníka zobrazíme zvlášť:



Všetkých deväť čísel tejto schémy dáva súčet $41+2\cdot(15+24+20) = 159$. V každom riadku schémy, resp. na každej strane trojuholníka, má teda byť súčet $159 : 3 = 53$. Čísla v prázdnych políčkach sú $53 - 24 - 20 = 9$, $53 - 15 - 20 = 18$, $53 - 15 - 24 = 14$.

6. *Recepčná v hoteli si vykladala karty a dostala nasledujúcu postupnosť:*

$$5,\ 9,\ 2,\ 7,\ 3,\ 6,\ 8,\ 4.$$

Presunula dve susedné karty na iné miesto tak, že táto dvojica opäť susedila, a to v rovnakom poradí. Tento krok urobila celkom trikrát, kým neboli karty usporiadané vzostupne podľa svojej hodnoty. Zistite, ako recepčná postupovala. (*Libuše Hozová*)

Nápad. Skúšajte presúvať hracie karty opísaným spôsobom.

Riešenie. Všimnime si, že keď presunieme dvojicu $(3, 6)$ medzi čísla 2 a 7, dostaneme dve dvojice po sebe idúcich čísel, ktoré sú navyše zoradené podľa veľkosti:

$$5,\ 9,\ 2,\ \mathbf{3},\ \mathbf{6},\ 7,\ 8,\ 4.$$

Medzi čísla 3 a 6 potrebujeme vložiť čísla 4 a 5. Tie ale nie sú pri sebe, presunieme teda dvojicu $(5, 9)$ za číslo 4. Tým jednak dostaneme číslo 5 hneď vedľa čísla 4, jednak číslo 9 bude na konci postupnosti:

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 4,\ \mathbf{5},\ \mathbf{9}.$$

V poslednom kroku presunieme dvojicu $(4, 5)$ medzi čísla 3 a 6:

$$2,\ 3,\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Poznámka. Je samozrejme možné zameniť prvý a druhý krok; postup recepčnej teda nie je jednoznačný.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013