**63. ročník Matematickej olympiády**
**2013/2014** *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

---

**1.** *Peter si myslí dvojciferné číslo. Keď toto číslo napíše dvakrát za sebou, vznikne štvorciferné číslo deliteľné deviatimi. Keď to isté číslo napíše trikrát za sebou, vznikne šesťciferné číslo deliteľné ôsmimi. Zistite, aké číslo si môže Peter myslieť.*
(*Erika Novotná*)

**Nápad.** Ako sa zadané informácie o deliteľnosti prejavia na deliteľnosti hľadaného dvojciferného čísla?

**Riešenie.** Číslo, ktoré vzniklo dvojnásobným zápisom mysleného čísla, je podľa zadania deliteľné deviatimi, preto musí byť aj jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Avšak ciferný súčet takto vzniknutého čísla je dvojnásobkom ciferného súčtu mysleného čísla. Preto je ciferný súčet mysleného čísla nutne deliteľný deviatimi.

Keď číslo vzniknuté trojnásobným zápisom mysleného čísla je deliteľné ôsmimi, musí byť deliteľné aj štyrmi. Jeho posledné dvojčíslie teda musí byť deliteľné štyrmi a týmto dvojčíslím je práve myslené číslo.

Zistili sme, že Petrovo myslené číslo je deliteľné deviatimi a súčasne štyrmi, je teda deliteľné 36. Jediné dvojciferné čísla deliteľné 36 sú 36 a 72. Overme, ktoré z týchto dvoch možností vyhovuje podmienke v zadaní o deliteľnosti ôsmimi:

- 363636 nie je deliteľné 8,
- 727272 je deliteľné 8.

Peter si môže myslieť jedine číslo 72.

*Poznámka.* V riešení používame tieto dobre známe kritériá o deliteľnosti:

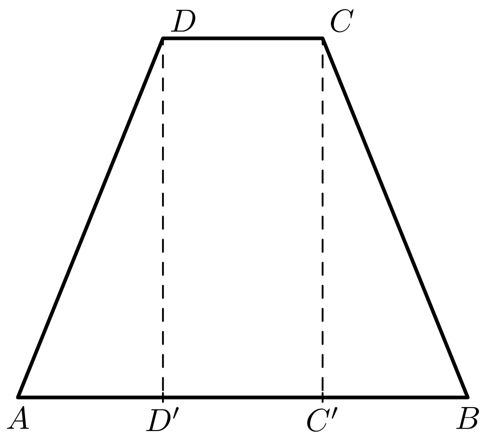
- číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslie je deliteľné štyrmi,
- číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď jeho posledné trojčíslie je deliteľné ôsmimi,
- číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný deviatimi.

---

**2.** *Daný je rovnoramenný lichobežník s dĺžkami strán $|AB| = 31\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 26\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 11\,\mathrm{cm}$. Na strane $AB$ je bod $E$ určený pomerom vzdialeností $|AE| : |EB| = 3 : 28$. Vypočítajte obvod trojuholníka $CDE$.* (*Lenka Dedková*)

**Nápad.** Použite opakovane Pytagorovu vetu.

**Riešenie.** Pätu kolmice na stranu $AB$ z bodu $C$, resp. $D$ označíme $C'$, resp. $D'$.



Keďže $ABCD$ je lichobežník, platí $|C'D'| = |CD| = 11\,\mathrm{cm}$, a keďže je navyše rovnoramenný,

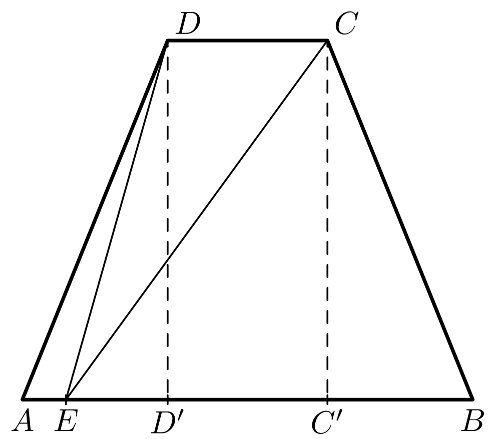
$$|AD'| = |BC'| = \frac{|AB| - |C'D'|}{2} = \frac{31 - 11}{2} = 10\,(\mathrm{cm}).$$

Pomocou Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku $BC'C$ (ktorý je zhodný s trojuholníkom $AD'D$) vypočítame výšku lichobežníka:

$$|CC'| = |DD'| = \sqrt{|BC|^2 - |BC'|^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,(\mathrm{cm}).$$

Na strane $AB$ je určený bod $E$ tak, že $|AE| : |EB| = 3 : 28$. Keďže $3 + 28 = 31$ a $|AB| = 31\,\mathrm{cm}$, je $|AE| = 3\,\mathrm{cm}$ a $|EB| = 28\,\mathrm{cm}$. Odtiaľ odvodzujeme, že

$$|ED'| = |AD'| - |AE| = 10 - 3 = 7\,(\mathrm{cm}),$$
$$|EC'| = |EB| - |BC'| = 28 - 10 = 18\,(\mathrm{cm}).$$




Pomocou Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku $ED'D$, resp. $EC'C$ vypočítame dĺžku strany $ED$, resp. $EC$:

$$|ED| = \sqrt{|ED'|^2 + |DD'|^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25\,(\mathrm{cm}),$$
$$|EC| = \sqrt{|EC'|^2 + |CC'|^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\,(\mathrm{cm}).$$

Teraz môžeme vypočítať obvod trojuholníka $CDE$:

$$o = |CD| + |DE| + |EC| = 11 + 25 + 30 = 66\,(\mathrm{cm}).$$

---

**3.** *Podlahu tvaru obdĺžnika so stranami 360 cm a 540 cm máme pokryť (bez medzier) zhodnými štvorcovými dlaždicami. Môžeme si vybrať z dvoch typov štvorcových dlaždíc, ktorých strany sú v pomere* $2 : 3$. *V oboch prípadoch sa dá pokryť celá plocha jedným typom dlaždíc bez pílenia. Menších dlaždíc by sme potrebovali o 30 viac ako väčších. Určte, ako dlhé sú strany dlaždíc.* (Karel Pazourek)

**Nápad.** Vyjadrite počet použitých dlaždíc v závislosti od dĺžky ich strany.

**Riešenie.** Označme $m$ dĺžku strany malej dlaždice a $v$ dĺžku strany veľkej dlaždice (v cm). Ak pokryjeme podlahu menšími dlaždicami, ku kratšej strane ich bude priliehať $\frac{360}{m}$ a k dlhšej strane $\frac{540}{m}$, celkom ich teda bude $\frac{360}{m} \cdot \frac{540}{m}$. Podobne celkový počet väčších dlaždíc bude $\frac{360}{v} \cdot \frac{540}{v}$. Podľa zadania tak musí platiť

$$\frac{360}{m} \cdot \frac{540}{m} = \frac{360}{v} \cdot \frac{540}{v} + 30. \tag{1}$$

Keďže $m : v = 2 : 3$, môžeme písať $m = 2x$ a $v = 3x$ pre novú neznámu $x$. Dosadením do predchádzajúcej rovnice a ďalšími úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{180}{x} \cdot \frac{270}{x} &= \frac{120}{x} \cdot \frac{180}{x} + 30, \\ 180 \cdot 270 &= 120 \cdot 180 + 30x^2, \\ 180 \cdot 150 &= 30x^2, \\ 900 &= x^2. \end{aligned}$$

Čísla $m$, $v$ a $x$ sú kladné, teda $x = 30$ a $m = 60$, $v = 90$ (cm).

Strany dlaždíc sú dlhé 60 cm a 90 cm.

**Iný nápad.** Určte priamo zo zadaného pomeru 2 : 3 pomer počtov jednotlivých dlaždíc.

**Iné riešenie.** Keďže pomer dĺžok strán dlaždíc je 2 : 3, pomer ich obsahov je 4 : 9. Označíme $p_m$ počet malých dlaždíc a $p_v$ počet veľkých dlaždíc. Keďže oba typy dlaždíc pokryjú celý obdĺžnik, musí platiť

$$p_m : p_v = 9 : 4. \tag{2}$$

Zo zadania vyplýva, že $p_m = p_v + 30$, čo spolu s predchádzajúcim pomerom dáva:

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} p_v &= p_v + 30, \\ \frac{5}{4} p_v &= 30, \\ p_v &= 24. \end{aligned}$$

Aby sme vedeli určiť dĺžku strany veľkej dlaždice, musíme zistiť, ako tieto dlaždice pokrývajú obdĺžnikovú podlahu. Dĺžky strán obdĺžnika sú v pomere $360 : 540 = 2 : 3$, v rovnakom pomere musia byť aj počty dlaždíc priliehajúcich k zodpovedajúcim stranám. Zo všetkých možných rozkladov celkového počtu veľkých dlaždíc,

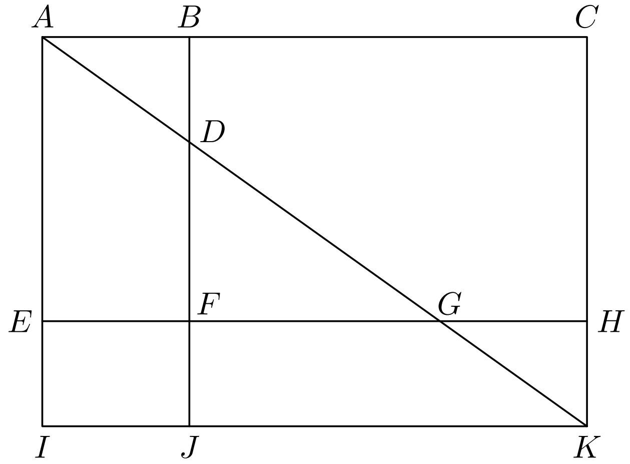
$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6,$$

tejto podmienke vyhovuje práve posledný rozklad. Dĺžka strany veľkej dlaždice je teda $\frac{360}{4} = \frac{540}{6} = 90$ (cm). Dĺžka strany malej dlaždice je potom $\frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ (cm).

*Poznámky.* Ak v prvom riešení namiesto pomocnej neznámej $x$ vyjadríme napr. $m = \frac{2}{3}v$, tak po dosadení do (1) dostávame rovnicu s neznámou $v$. Po úpravách dostaneme $v = 90$ a $m = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ (cm).

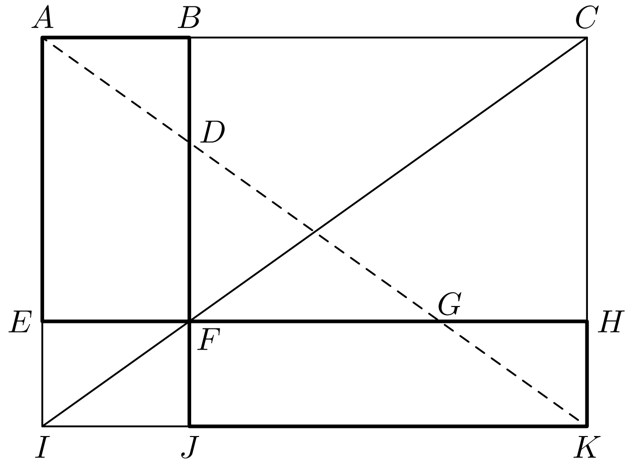
Ak v druhom riešení namiesto $p_m = \frac{9}{4}p_v$ vyjadríme $p_v = \frac{4}{9}p_m$, tak po dosadení do (2) dostávame rovnicu s neznámou $p_m$. Po jednoduchej úprave dostaneme $p_m = 54$, jediný vyhovujúci rozklad je $54 = 6 \cdot 9$, takže $m = \frac{360}{6} = \frac{540}{9} = 60$ (cm).

**4.** *V pravouholníku $ACKI$ sú vyznačené dve rovnobežky so susednými stranami a jedna uhlopriečka (obr.). Pritom trojuholníky $ABD$ a $GHK$ sú zhodné. Určte pomer obsahov pravouholníkov $ABFE$ a $FHKJ$.* (*Vojtěch Žádník*)




**Nápad.** Bod $F$ leží na uhlopriečke $IC$.

**Riešenie.** Zo zadania vyplýva, že trojuholník $ABD$ je zhodný napr. aj s trojuholníkom $IJF$. Zodpovedajúca zhodnosť je osová súmernosť podľa priamky, ktorá je kolmá na úsečku $AI$ a prechádza jej stredom. Podľa tejto priamky sú súmerné aj uhlopriečky pravouholníka $ACKI$, čo znamená, že bod $F$ leží na uhlopriečke $IC$.




Obsah pravouholníka $ABFE$ teda môžeme vyjadriť ako obsah trojuholníka $IAC$ zmenšený o obsahy trojuholníkov $IEF$ a $FBC$. Podobne môžeme obsah pravouholníka $FHKJ$ vyjadriť ako obsah trojuholníka $CKI$ zmenšený o obsahy trojuholníkov $FJI$ a $CHF$. Trojuholníky $IAC$ a $CKI$, $IEF$ a $FJI$, $FBC$ a $CHF$ sú však po dvojiciach zhodné, takže majú po dvojiciach rovnaké obsahy. Z toho vyplýva, že pravouholníky $ABFE$ a $FHKJ$ majú rovnaký obsah.

**Iný nápad.** Trojuholníky $ABD$ a $GFD$ sú podobné.

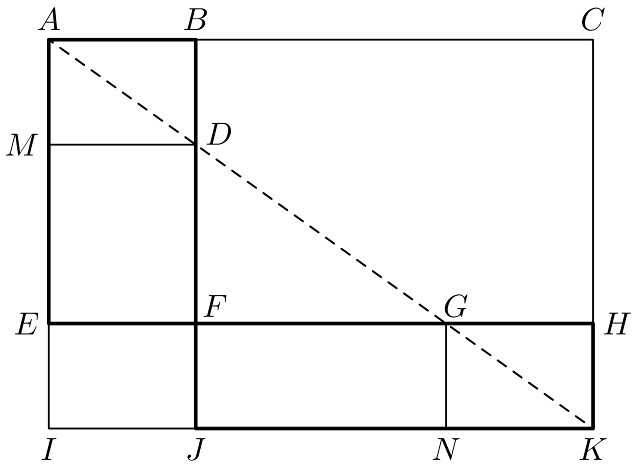
**Iné riešenie.** Zo zadania vyplýva, že trojuholníky $ABD$ a $GFD$ majú po dvojiciach zhodné vnútorné uhly, takže sú podobné a zodpovedajúce strany sú teda v rovnakom pomere:

$$|AB| : |BD| = |GF| : |FD|,$$

čiže

$$|AB| \cdot |FD| = |GF| \cdot |BD|.$$

Keďže $|AB| = |EF|$ a $|BD| = |FJ|$, môžeme predchádzajúcu rovnosť interpretovať ako rovnosť obsahov pravouholníkov $EFDM$ a $GFJN$.




Pravouholník $ABFE$ pozostáva z pravouholníkov $EFDM$ a $ABDM$, pravouholník $FHKJ$ pozostáva z pravouholníkov $GFJN$ a $GHKN$, pričom pravouholníky $ABDM$ a $GHKN$ sú zrejme zhodné. Z toho vyplýva, že pravouholníky $ABFE$ a $FHKJ$ majú rovnaký obsah.

*Poznámka.* Druhú časť prvého riešenia možno nájsť ako samostatné tvrdenie v Euklidových Základoch (43. tvrdenie v I. knihe). Tento poznatok sa používa napr. pri konštrukcii pravouholníka, ktorý má danú jednu stranu a rovnaký obsah ako iný pravouholník (príp. trojuholník či všeobecný mnohouholník).

---

**5.** *Eva riešila experimentálnu úlohu Fyzikálnej olympiády. Dopoludnia od 9:15 robila v trojminútových odstupoch 4 merania. Získané hodnoty zapisovala do tabuľky, ktorú si pripravila v počítači:*

| *hodín* | *minút* | *hodnota* |
|---|---|---|
| *9* | *15* | |
| *9* | *18* | |
| *9* | *21* | |
| *9* | *24* | |

*Popoludní v experimente pokračovala. Tentoraz urobila v trojminútových odstupoch 9 meraní a hodnoty zapisovala do podobnej tabuľky. Omylom do počítača zadala, aby sa zobrazil súčet deviatich čísel z prostredného stĺpca. Tento zbytočný výpočet vyšiel* 258. *Ktoré čísla boli v danom stĺpci?* (Libor Šimůnek)

**Nápad.** Dokážte, že počas experimentu musela minútová ručička dosiahnuť ku dvanástke.

**Riešenie.** Ak počas experimentu nedosiahla minútová ručička ku dvanástke, môžeme čísla v stĺpci minút označiť takto:

$$x,\ x+3,\ x+6,\ x+9,\ x+12,\ x+15,\ x+18,\ x+21,\ x+24.$$

Ich súčet je $9x + 108$, čo má byť rovné 258:

$$9x + 108 = 258,$$
$$9x = 150.$$

To však nie je možné, pretože $x$ je prirodzené číslo a 150 nie je násobkom 9.

Preto musela minútová ručička v priebehu experimentu dosiahnuť ku dvanástke. Od tohto okamihu sú všetky čísla oproti predchádzajúcej postupnosti zmenšené o 60. Ak počet meraní od dosiahnutia dvanástky označíme $z$, tak súčet čísel v danom stĺpci je rovný

$$9x + 108 - 60z = 258, \tag{1}$$

pričom $z$ je prirodzené číslo od 1 do 8. Po úpravách dostávame:

$$9x = 150 + 60z,$$
$$3x = 50 + 20z.$$

Prirodzené číslo na ľavej strane je násobkom troch. Aby bolo číslo na pravej strane tiež násobkom troch, musí byť $z$ rovné 2, 5 alebo 8. Pre každú hodnotu $z$ vypočítame $x$ a urobíme diskusiu:

- Pre $z = 2$ dostaneme $x = 30$. Pokiaľ by experiment začal v 30. minúte, skončil by v 54. minúte a k prechodu cez dvanástku by vôbec nedošlo. To je v rozpore s predpokladom $z = 2$.
- Pre $z = 5$ dostaneme $x = 50$. Pokiaľ by experiment začal v 50. minúte, skončil by v 14. minúte:

  $$50,\ 53,\ 56,\ 59,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14. \tag{2}$$

  Po dosiahnutí dvanástky by sa tak uskutočnilo päť meraní, čo je v súlade s predpokladom $z = 5$.
- Pre $z = 8$ dostaneme $x = 70$. Avšak $x$ označuje minúty po celej hodine a môže nadobúdať iba hodnoty 0 až 59.

Z uvedených riešení rovnice (1) vyhovuje iba druhá možnosť. Čísla, ktoré boli napísané v stĺpci minút, sú uvedené v riadku (2).

---

**6.** *V hostinci U troch prasiatok obsluhujú Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hosťovi pripočíta k celkovej cene 10 grajciarov. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje presne to, čo zjedol a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hosťovi dá zľavu z celkovej ceny vo výške 20 %. Prasiatka sa na seba tak podobajú, že žiadny hosť nepozná, ktoré práve obsluhuje. Baránok Vendelín si v pondelok objednal tri koláčiky a džbánok džúsu a zaplatil za to 56 grajciarov. Bol spokojný, takže hneď v utorok zjedol päť koláčikov, vypil k nim tri džbánky džúsu a platil 104 grajciarov. V stredu zjedol osem koláčikov, vypil štyri džbánky džúsu a zaplatil 112 grajciarov.*

1. *Kto obsluhoval Vendelína v pondelok, kto v utorok a kto v stredu?*
2. *Koľko grajciarov účtuje Rašík za jeden koláčik a koľko za jeden džbánok džúsu?*

*(Všetky koláčiky sú rovnaké, rovnako tak všetky džbánky džúsu. Ceny uvádzané v jedálnom lístku sa v uvedených dňoch nemenili.)* *(Michaela Petrová)*

**Nápad.** Koľko toho Vendelín zjedol a vypil v pondelok a v utorok dokopy?

**Riešenie.** Všimnime si, že Vendelín zjedol a vypil v stredu to isté, čo v pondelok a v utorok dokopy. Lenže v pondelok a v utorok dokopy utratil $56+104 = 160$ grajciarov, zatiaľ čo v stredu platil 112 grajciarov, čo je o 48 grajciarov menej. Diskutujme, kto mohol obsluhovať v stredu:

- Keby to bol poctivec Rašík, musel by hostinec počas pondelka a utorka oklamať Vendelína práve o 48 grajciarov. Pri dvoch plateniach však možno zákazníka oklamať maximálne o 20 grajciarov. Možnosť, že v stredu obsluhoval Rašík, preto zavrhujeme.
- Keby to bol Pašík, bola by skutočná stredajšia cena $112 - 10 = 102$ grajciarov. Vendelína by museli počas prvých dvoch dní oklamať dokonca o 58 grajciarov. Možnosť, že v stredu obsluhoval Pašík, tiež zavrhujeme.
- Keby to bol Sašík, predstavovala by útrata 112 grajciarov 80 % skutočnej ceny. To znamená, že skutočná stredajšia cena by bola $112 : 0{,}8 = 140$ grajciarov. Hostinec by musel počas pondelka a utorka oklamať Vendelína o 20 grajciarov. To sa mohlo stať len vtedy, ak ho v oba dni obsluhoval nečestný Pašík. Táto možnosť vyhovuje.

Poznáme teda odpoveď na prvú otázku: V pondelok a utorok obsluhoval Pašík, v stredu Sašík. Skutočné ceny (t. j. ceny podľa Rašíka) tak boli:

- pondelok (3 koláčiky, 1 džbánok): $56 - 10 = 46$ grajciarov,
- utorok (5 koláčikov, 3 džbánky): $104 - 10 = 94$ grajciarov,
- streda (8 koláčikov, 4 džbánky): $112 : 0{,}8 = 140$ grajciarov.

Z Vendelínovej stredajšej objednávky môžeme odvodiť, že 2 koláčiky a 1 džbánok džúsu stojí $140 : 4 = 35$ grajciarov. Porovnaním s Vendelínovou pondelkovou objednávkou zisťujeme, že skutočná cena jedného koláčika je $46 - 35 = 11$ grajciarov. Podľa pondelkovej objednávky určíme aj skutočnú cenu jedného džbánku: $46 - 3 \cdot 11 = 13$ grajciarov. Tým máme odpoveď na druhú otázku: Rašík účtuje za jeden koláčik 11 grajciarov a za jeden džbánok džúsu 13 grajciarov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

| | |
|---|---|
| Autori: | Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník |
| Recenzenti: | Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Peter Novotný |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013 |